Cálculo II – 2020/2021

Planificação **Aula 14** (E@D)

TP4D: 3ª feira, 04/05, 16h30

Notas: 1) Passar para o caderno ou imprimir esta planificação e estudá-la antes da aula.
2) A aula será essencialmente dedicada à resolução dos exercícios apresentados.
3) Depois da aula resolver os TPCs indicados no final desta planificação.

Slide 3 **Extremos**

Novos slides ⇝ Capítulo 3, parte 2

Definição: Sejam $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $p \in D$. Diz-se que:

- $f(p)$ é o **máximo global** (ou **absoluto**) de f se $f(x) \leq f(p), \forall x \in D$
- $f(p)$ é o **mínimo global** (ou **absoluto**) de f se $f(x) \geq f(p), \forall x \in D$
- $f(p)$ é um **máximo local** (ou **relativo**) de f se existir $r > 0$ tal que
  $f(x) \leq f(p), \forall x \in D \cap B_r(p)$
- $f(p)$ é um **mínimo local** (ou **relativo**) de f se existir $r > 0$ tal que
  $f(x) \geq f(p), \forall x \in D \cap B_r(p)$
- **Extremos** ⇝ Máximos ou mínimos
- **Extremantes** ⇝ pontos p onde os extremos são atingidos
  ↳ **maximizantes** ou **minimizantes**

Slide 4 **Existência de extremos globais**

Teorema de Weierstrass

$$\left.\begin{array}{l} f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ contínua} \\ D \text{ fechado e limitado} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{f \text{ atinge em } D \text{ o mínimo e máximo globais}}$$

Exercício 1: Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

a) Calcule o domínio de f.

b) Justifique que f tem máximo e mínimo globais em D

Exercício 2: Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = (x+3)^2 + (y-2)^2 + 5$.

a) Mostrar que f atinge mínimo global em $(-3; 2)$.

b) Justifique que f não possui máximo global.
Isso contradiz o Teorema de Weierstrass?

Slides 5 e 6 **Existência de extremos locais**

Teorema de Fermat: Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ diferenciável em $p \in int(D)$.

$f(p)$ é um extremante de f $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $\nabla f(p) = (0, \dots, 0)$

Definição: Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ diferenciável em $p \in int(D)$.

- p é um **ponto crítico de f** se $\nabla f(p) = (0, \dots, 0)$
- p é um **ponto de sela de f** se é ponto crítico de f mas não é seu extremante.

Exercício 3: Determine os pontos críticos de $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

Nota: Veremos no exercício 6a) quais destes pontos críticos são extremantes e quais são pontos de sela.

Slide 7 **Matriz Hessiana**

Definição: Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ e $p \in int(D)$. Se existem as derivadas parciais de 2-a ordem de f em p, a **matriz Hessiana de f em p** é:

$$H_f(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(p) \end{bmatrix}$$

$m = 2$

$$H_f(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \end{bmatrix}$$

$m = 3$

$$H_f(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(p) \end{bmatrix}$$

Nota: Se f for de classe C^2 numa bola centrada em p, pelo Teorema de Schwarz, todos os pares de derivadas mistas são iguais $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p),\ i \neq j}$

Cálculo de determinantes

↳ recordar na disciplina de ALGA

Notações: Seja A uma matriz quadrada.
Determinante de A ⇝ $\det(A)$ ou $|A|$

Definição: O determinante da matriz Hessiana chama-se **hessiano**.
↳ $\det(H_f(p))$

$\boxed{\text{Slides 10 a 12}}$ **Classificação de pontos críticos**

Teste das segundas derivadas ⇝ só se pode usar com 2 variáveis

Sejam $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a,b) \in \operatorname{int}(D)$.
Suponha-se que $\nabla f(a,b) = (0,0)$ e f é de classe C^2 numa bola centrada em (a,b).

- Se $\det(H_f(a,b)) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$, então $f(a,b)$ é **mínimo local**.
- Se $\det(H_f(a,b)) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$, então $f(a,b)$ é **máximo local**.
- Se $\det(H_f(a,b)) < 0$, então (a,b) é **ponto de sela** de f.
- Se $\det(H_f(a,b)) = 0$, nada se pode concluir.

Exercício 4: Determine e classifique os pontos críticos de $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy + 15$.

Exercício 5: Mostre que a função anterior não atinge máximo global nem mínimo global em $\mathbb{R}^2$.

Exercício 6: Determine e classifique os pontos críticos das seguintes funções:

a) $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

b) $f(x,y) = -x^2 - 5y^2 + 8x - 10y - 13$

c) $f(x,y) = x^4 + y^2 + y^6$

d) $f(x,y) = x^3 + y^2 + y^6$

TPCs: Folha prática 3 : 17 até 28

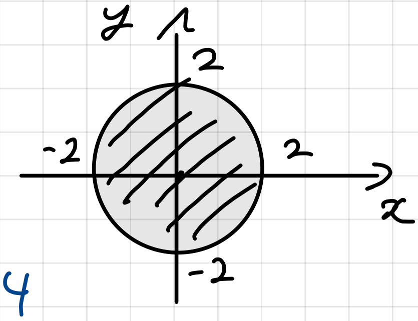
Teste 1, 10/04/2019 → Ex. 6 ; 7c)

Ex. Final, 19/06/2019 → Ex. 3 b)

Aula 14

1) $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$

a) $Df = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 - x^2 - y^2 \geq 0 \}$



$-x^2 - y^2 \geq -4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4$

b) Df é fechado e limitado e f é contínua, logo pelo Teo. de Weierstrass f tem máximo e mínimo globais em Df.

2) $f(x,y) = (x+3)^2 + (y-2)^2 + 5 \qquad Df = \mathbb{R}^2$

a) Tem-se que $(x+3)^2 + (y-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{(x+3)^2 + (y-2)^2 + 5}_{f(x,y)} \geq 5$ $\quad CDf = [5, +\infty[$

$f(-3;2) = (-3+3)^2 + (2-2)^2 + 5 = 5 \rightsquigarrow$ mínimo global ✓

b) Como $CDf = [5, +\infty[$ então f não possui máximo global

Isto não contradiz o Teo. de Weierstrass pois $Df = \mathbb{R}^2$ não é limitado

3) $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

Pontos críticos de $f \rightsquigarrow \nabla f(p) = (0,0)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + y^2 + 10x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 2y$

$\nabla f = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ 2xy + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ y(2x+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \text{———} \\ x = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 + 0^2 + 10x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 6 \times (-1)^2 + y^2 + 10 \times (-1) = 0 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(6x+10) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y^2 - 4 = 0 \\ x = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 6x + 10 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y^2 = 4 \\ x = -1 \end{cases} \rightarrow y = \pm\sqrt{4}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{10}{6} \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -2 \\ x = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$

4 pontos críticos: $P_1 = (0,0)$; $P_2 = (-\frac{5}{3}; 0)$; $P_3 = (-1; 2)$; $P_4 = (-1; -2)$

4)

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy + 15 \longrightarrow \text{classificar os pontos críticos}$$

1º Passo: Calcular $\frac{df}{dx}$ e $\frac{df}{dy}$

$$\frac{df}{dx} = 3x^2 + 3y \qquad \frac{df}{dy} = 3y^2 + 3x$$

2º Passo: Calcular os pontos críticos de $f \rightsquigarrow \nabla f(x,y) = (0,0)$

$\hookrightarrow$ Resolver o sistema $\begin{cases} \frac{df}{dx}(x,y) = 0 \\ \frac{df}{dy}(x,y) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y = 0 \\ 3y^2 + 3x = 0 \end{cases} \overset{\div 3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ y^2 + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2 \\ (-x^2)^2 + x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_ \\ x^4 + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_ \\ x(x^3+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_ \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \_\_\_ \\ x^3 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \_\_\_ \\ x = \sqrt[3]{-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -1 \\ x = -1 \end{cases}$$

2 Pontos Críticos

$P_1 = (0,0)$

$P_2 = (-1,-1)$

3º Passo: Calcular as derivadas parciais de 2ª ordem:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = (3x^2 + 3y)'_x = 6x \qquad \frac{d^2 f}{dy\,dx} = (3x^2 + 3y)'_y = 3 = \frac{d^2 f}{dx\,dy} \qquad \frac{d^2 f}{dy^2} = (3y^2 + 3x)'_y = 6y$$

Teo. Schwarz

4º Passo: Escrever a matriz Hessiana

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{d^2 f}{dx^2}(x,y) & \frac{d^2 f}{dx\,dy}(x,y) \\ \frac{d^2 f}{dy\,dx}(x,y) & \frac{d^2 f}{dy^2}(x,y) \end{bmatrix} \qquad Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 3 \\ 3 & 6y \end{bmatrix}$$

5º Passo: Para cada ponto crítico $P = (x_0, y_0)$ obtido no 2º passo, calcular $\det(Hf(x_0,y_0))$ e classificá-lo de acordo com o teste das segundas derivadas (slide 10)

Teste das segundas derivadas $\rightsquigarrow$ só se pode usar com 2 variáveis

Sejam $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a,b) \in int(D)$.
Suponha-se que $\nabla f(a,b) = (0,0)$ e f é de classe C^2 numa bola centrada em (a,b).

- Se $\det(Hf(a,b)) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$, entao $f(a,b)$ é mínimo local.
- Se $\det(Hf(a,b)) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$, então $f(a,b)$ é máximo local.
- Se $\det(Hf(a,b)) < 0$, então (a,b) é ponto de sela de f.
- Se $\det(Hf(a,b)) = 0$, nada se pode concluir.

$\cdot\ P_1 = (0,0) \rightsquigarrow |Hf(0,0)| = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \times 0 - 3 \times 3 = -9 < 0$

$\Downarrow$

$(0,0)$ é ponto de sela de f

$\cdot\ P_2 = (-1;1) \rightsquigarrow |Hf(-1,-1)| = \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 36 - 9 = 27 > 0$

$\frac{d^2 f}{dx^2}(-1,-1)\ -6 < 0$

$\Downarrow$

$(-1,-1)$ é máximo local

$(-1)^3 + (-1)^3 + 3 \times (-1) \times (-1) + 15 = 16$

5) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy + 15$

f não tem máximo global em $\mathbb{R}^2$ pois

$CD_f = \mathbb{R}$ ⟶ por exemplo, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x,0) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (x^3+15) = \pm\infty$

6) a) $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

1.º Passo, 2.º Passo: Ver ex. 3 ⟶ 4 pontos críticos: $P_1 = (0,0)$; $P_2 = (-\frac{5}{3}; 0)$; $P_3 = (-1;2)$; $P_4 = (-1;-2)$

3.º Passo: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (6x^2 + y^2 + 10x)'_x = 12x + 10$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (6x^2 + y^2 + 10x)'_y = 2y = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ← Teo. Schwarz

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (2xy + 2y)'_y = 2x + 2$

4.º Passo: $\mathcal{H}f(x,y) = \begin{bmatrix} 12x+10 & 2y \\ 2y & 2x+2 \end{bmatrix}$

5.º Passo:

$P_1 = (0,0) \rightsquigarrow |\mathcal{H}f(0,0)| = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 20 > 0 \rightsquigarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 10 > 0 \rightsquigarrow f(0,0)$ é mínimo local

$\hookrightarrow = 0$

$P_2 = (-\frac{5}{3}, 0) \rightsquigarrow |\mathcal{H}f(-\frac{5}{3}, 0)| = \begin{vmatrix} 12\times(-\frac{5}{3})+10 & 0 \\ 0 & 2\times(-\frac{5}{3})+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{vmatrix} = \frac{40}{3} > 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\frac{5}{3}, 0) = -10 < 0 \rightsquigarrow f(-\frac{5}{3}, 0)$ é máximo local

$\hookrightarrow = 2\times(-\frac{5}{3})^3 + 0 + 5\times(-\frac{5}{3})^2 + 0 = \frac{125}{27}$

$P_3 = (-1,2)$, $P_4 = (-1,-2)$ > T.P.C. $\rightsquigarrow |\mathcal{H}f| = -16 < 0$

↓ Pontos de sela

b) $f(x,y) = -x^2 - 5y^2 + 8x - 10y - 13$

1.º Passo: $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x + 8$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = -10y - 10$

2.º Passo: $\begin{cases} -2x + 8 = 0 \\ -10y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 8 \\ -10y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$ $\quad P_1(4;-1)$

3.º Passo: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (-2x+8)'_x = -2$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (-2x+8)'_y = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (-10y - 10)'_y = -10$

4.º Passo: $\mathcal{H}f(x,y) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$

5.º Passo:

$$|\mathcal{H}f(4;-1)| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -10 \end{vmatrix} = 20 > 0 \rightsquigarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(4;-1) = -2 < 0$$

Logo $f(4;-1)$ é máximo local

$$\to -4^2 - 5\times(-1)^2 + 8\times 4 - 10\times(-1) - 13 = 18$$

c) $f(x,y) = x^4 + y^2 + y^6$

1.º Passo: $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 6y^5$

2.º Passo: $\begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 2y + 6y^5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y(2+6y^4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ 6y^4 = -2 \end{cases}$

↳ impossível

Único ponto crítico: $P_1 = (0,0)$

3.º Passo: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 + 30y^4$

4.º Passo: $\mathcal{H}f(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 2+30y^4 \end{bmatrix}$

5.º Passo: $|\mathcal{H}f(0,0)| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightsquigarrow$ nada se pode concluir usando este método

Nestes casos temos de verificar por definição

$$f(x,y) = \underbrace{x^4 + y^2 + y^6}_{\geq 0} \longrightarrow CD_f = [0, +\infty[$$

$$f(0,0) = 0^4 + 0^2 + 0^6 = 0$$

Logo $f(0,0)$ é mínimo global

d) $f(x,y) = x^3 + y^2 + 6$

Verificar (T.P.C.) que o único ponto crítico é $(0,0)$ e nada se pode concluir

Temos que $f(0,0) = 0$

Consideremos os pontos $(a,0)$, com a próximo de zero

$$f(a,0) = a^3 \begin{cases} \nearrow > 0 \text{ se } a > 0 \\ \searrow < 0 \text{ se } a < 0 \end{cases}$$

Portanto $f(0,0) = 0$ não é máximo nem é mínimo local, é ponto de sela.